第　1　問
解答

八木 千尋

まずは関数 f,g がどのような値を返すのかを確かめる.

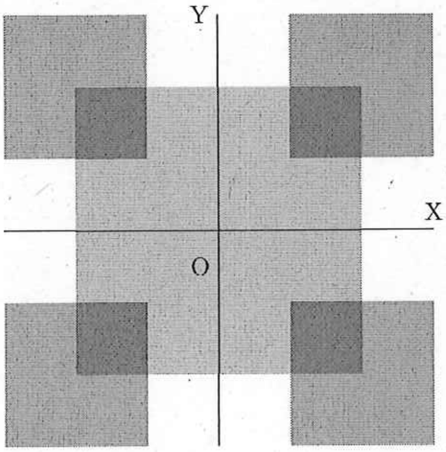
1 $p \geq q$ のとき.$f(p,q) = \frac{(p+q)+(p-q)}{2} = p, g(p,q) = \frac{(p+q)-(p-q)}{2} = q$

2 $p < q$ のとき.$f(p,q) = \frac{(p+q)+(q-p)}{2} = q, g(p,q) = \frac{(p+q)-(q-p)}{2} = p$

この結果から,$f(p,q) = max(p,q), g(p,q) = min(p,q)$ であることがわかった.
(1) 整数の組 (x,y) であって,$max(x,y) = a, min(x,y) = b$ であるような組の数は

1 $a > b$ のとき,$(x,y) = (a,b),(b,a)$ の 2 組
2 $a = b$ のとき,$(x,y) = (a,a)$ の 1 組
3 $a < b$ のとき, そのような組は存在しない.

(2)$max(|x|,|y|) \leq a, min(|x|,|y|) \geq b$ であるような領域の面積を求めればよい.



$max(|x|,|y|) \leq a$ を赤,$min(|x|,|y|) \geq b$ を青で塗った.
つまり上の図の紫の部分の面積である.

1 $a > b$ のとき,$(a-b)^2$
2 $a \leq b$ のとき,0

である.

第　2　問

解答

八木 千尋

問題の「あいこ」となる条件をわかりやすくする.
条件の一つ目の,「全ての人が勝ったかつ負けた」となるためには, 条件より全ての u, v に対して $g(f(u), f(v)) = 0$ となればいい.
すなわち $f(1) = f(2) = ... = f(k)$ となればよい. 二つ目の,「全ての人が勝っていないかつ負けていない」となるためには,u, v, w に対して $g(f(u), f(v)) = g(f(v), f(w)) = g(f(w), f(u))$ となれば良いことがわかる.
なぜならば $f(u), f(v)$ に対して $f(u) \neq f(a) \neq f(v)$ を満たす整数 $f(a)$ が $f(u) < f(a) \oplus |f(u) - f(a)| < k$ かつ $f(a) < f(v) \oplus |f(a) - f(v)| < k$ を満たすとき, 人 P_a は「勝っていないかつ負けていない」,
また $f(u) = f(a)$ としても,$f(u)$ が「勝っていないかつ負けていない」より人 P_a は「勝っていないかつ負けていない」ということがわかるからである.
よって「あいこ」となる条件は,$f(1) = f(2) = ... = f(k)$ または $g(f(u), f(v)) = g(f(v), f(w)) = g(f(w), f(u))$ となる整数の組 (u, v, w) が存在することである.
$f(1) = 1$ とする. (1) 通常のじゃんけんである.
「あいこ」となる (f(2),f(3)) の組は,(1,1),(2,3),(3,2) の 3 つである.
よって $\frac{3}{3^2} = \frac{1}{3}$
(2)「あいこ」でない手の組の数を考える.
1. $p_{1,k}$
全ての $f(j)(1 \leq j \leq k)$ が (1,2) または (1,3) となればよい.
よって「あいこ」にならない手の組は $2(2^{k-1} - 1)$ 組である.
よって $1 - \frac{2(2^{k-1}-1)}{3^{k-1}}$.
2. $p_{2,k}$
同様に, 全ての $f(j)(1 \leq j \leq k)$ が (1,2,3),(1,2,5),(1,4,5),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5) となればよい.
よって「あいこ」にならない手の組は $3(3^{k-1} - 22^{k-1} - 1 - 1) + 4(2^{k-1} - 1) = 3^k - 2^k - 1$ 組である.
よって $1 - \frac{3^k-2^k-1}{5^{k-1}}$.
(3)「あいこ」となる組の個数を数える.
f(2) を 1 $2n - 1$ までうごかし, そのとき「あいこ」となる $f(3)$ の個数を合計すればよい.
よって 1. $f(2) = 1$ のとき,$f(3)$ は 1 のみ.
2. $1 < f(2) \leq n + 1$ のとき,$f(3)$ は $n + 1 < f(3) \leq f(2) + n$, よって $f(2) - 1$ 個
3. $n + 1 < f(2) \leq 2n + 1$ のとき,$f(3)$ は $f(2) - n \leq f(3) \leq n + 1$, よって $2n + 2 - f(2)$ 個
よって手の数であるこれらの和は
$1 + \sum_{f=1}^{n}(f - 1) + \sum_{f=n+2}^{2n+1}(2n + 2 - f) = 1 + \sum_{f=1}^{n} f + \sum_{f=1}^{n} f = n^2 + n + 1$
よって $\frac{n^2+n+1}{(2n+1)^2}$

第三問

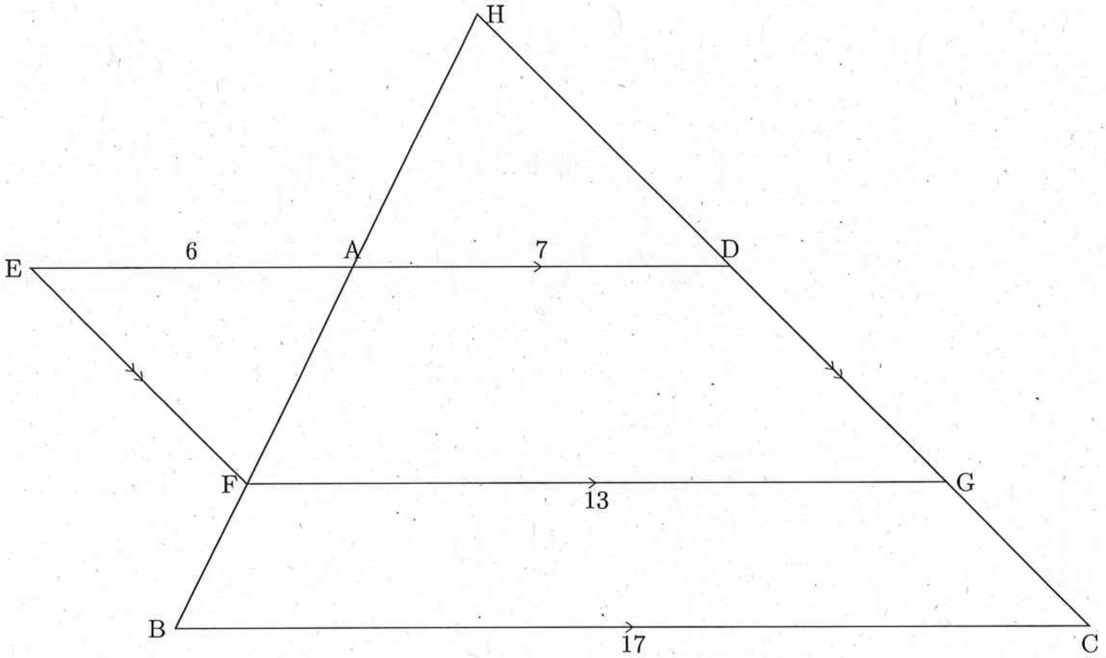
キウイと階段

まず7段登る時の通り数を求める。
フィボナッチ数列より21通りである。よって折り返しをしない場合の上り下りの通り数は
21×21=441通りとなる。
続いて折り返しをする場合について考える。
まず7段登る時に6秒かかる場合(6通り)について考えるこの場合1回のみ1段だけ移動するという操作を行うことができる。よって6×5=30通りとなる。
続いて5秒かかる場合(10通り)について考える。
前述の通り、10×5=50通りとなる。また、最後に降りる時以外にも入れる方法があるため、
10×5×11=550通りとなる。
最後に、4秒かかる場合(4通り)について考える。
前述の通り4×5=20通り、4×5×11=220通り、
4×5×11×10=2200通りとなる。この総和は、
3511通りとなる。

<u>A3511通り</u>

第　4　問
解答

望月 允陽　丸山 大登



辺 AB を A 方向に, 辺 CD を D 方向に延長し, その交点を H とする.
このとき,$\triangle HBC \backsim \triangle HFG \backsim \triangle HAD$ であり, 相似比は $17:13:7$ である.
$\triangle HBC$ と $\triangle HFG$ について, 相似比が $17:13$ であるので, 面積比は $289:169$ また, 四角形 $FBCG = \triangle HBC - \triangle HFG$ より,$289-169=120$...①
$\triangle HFG$ と $\triangle HAD$ について, 相似比が $13:7$ であるので, 面積比は $169:49$ また, 四角形 $AFGD = \triangle HFG - \triangle HAD$ より,$169-49=120$...②
①,②より, 四角形 $FBCG =$ 四角形 $AFGD$...③
$\triangle AEF$ について $\square$EFGD との面積比が, 底辺が $\frac{6}{13}$ 倍, 三角形であるのでさらに $\frac{1}{2}$ 倍で $\triangle AEF : \square EFGD = 3:13$...④
ここで, 四角形 $AFGD = \square$EFGD $- \triangle AEF$ なので,④より, $\triangle AEF$: 四角形 $AFGD = 3:10$....⑤
③, ⑤ より,$\triangle AEF$: 四角形 $FBCG = 3:10$
よって,$\frac{3}{10}$ 倍

第　5　問
解答

森田 悠斗　大場 洸之介　久保 洋翔

(1) 4 人の手牌 52 枚が全て一九字牌になればよい．すなわち求める確率 p は

$$p = \frac{52!}{{}_{136}\mathrm{P}_{52}}$$

(2) (1) かつ全員の手牌が国士無双十三面待ちになればよい．
全員が国士十三面待ちであるとき，各人は任意の種類の牌を互いに入れ替えることが出来る．また各人は手牌を任意の順で引くことが可能である．
よって $\dfrac{4!^{13}13!^4}{52!}$ である．ここで，

$$\log_{10}(\frac{4!^{13}13!^4}{52!}) = 13\log_{10}(4!) + 4\log_{10}(13!) - \log_{10}(52!)$$
$$\log_{10}(\frac{52!}{{}_{136}\mathrm{P}_{52}}) = \log_{10}(52!) - (\log_{10}(136!) - \log_{10}(84)!)$$

であるから，求める確率 q は,

$$\begin{aligned} q &= \log_{10}(\frac{4!^{13}13!^4}{52!}\frac{52!}{{}_{136}\mathrm{P}_{52}}) \\ &= 13\log_{10}(4!) + 4\log_{10}(13!) - \log_{10}(52!) + \log_{10}(52!) - (\log_{10}(136!) - \log_{10}(84)!) \\ &= 13\log_{10}(4!) + 4\log_{10}(13!) - \log_{10}(136!) + \log_{10}(84!) \\ &\fallingdotseq 13 \cdot 1.38 + 4 \cdot 9.79 - 232.56 + 126.52 = -48.94 \end{aligned}$$

q を小数展開するとき，初めて 0 以外の数字が表れる桁は，小数点以下 49 桁目である．

第6問

I.使用できる数

互いに素な5つの数で奇数を作るため、5つの数のうち、偶数は0個か2個か4個必要になる。

しかし、偶数を2つ以上使うことは互いに素である要件に反するため、偶数は使ってはいけないということになる。

II.数の上限

そのため、4つの使用できる数の和の最小値は26(3,5,7,11)であり、その場合に用いる5つ目の数は31であるため、使用できる数の最大値は31までとなる。

つまり、31までの互いに素な奇数5つを用いて和を57にする必要がある。

II'.使用できる数の一覧

3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,23,25,27,29,31

III-1.剰余で総当たり

使用できる数を3で割った余りで分類すると、

{3,9,15,21,27} ...0　この集合をAとおく。

{7,13,19,25,31} ...1　この集合をBとおく。

{5,11,17,23,39} ...2　この集合をCとおく。

となる。この際、{5,15,25},{7,21}は要素内の2つ以上を同時に使うことができない。

57を3で割った余りは0になるので、あまりが0になるようなA,B,Cの組み合わせは、

{A,A,A,A,A},{A,A,A,B,C},{A,B,B,C,C},{B,B,B,B,C},{B,C,C,C,C}がある。

このうち、{A,A,A,B,C}, {A,B,B,C,C}は和の最小値が57以下になる。

しかし、前者は集合Aに含まれる数同士が公約数3を持つため使用できない。

よって、{A,B,B,C,C}のみが使用できる。

ここからは、すべての組み合わせを総当たりで考える。

第6問 (続)

III-2.総当たり実践

順番に関しては、{A,B_1,B_2,C_1,C_2}($B_1<B_2,C_1<C_2$)で統一する。

{3,7,31,5,11},{3,7,19,5,23},{3,7,13,11,23},{3,13,19,5,17}

{9,7,19,5,17},{9,7,13,11,17},{9,7,13,5,23},{9,13,19,5,11}

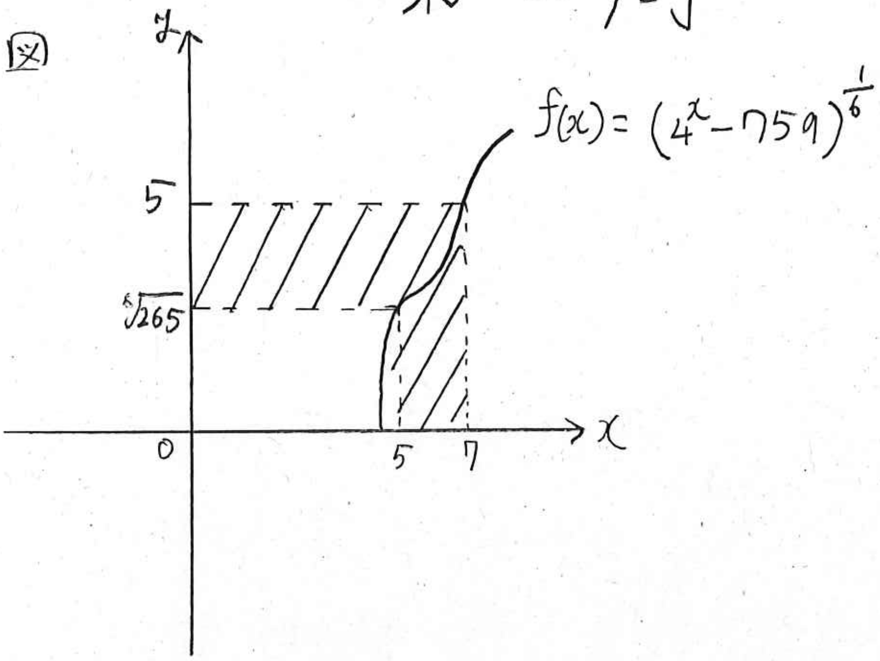
{15,7,13,5,17},{15,7,19,5,11}

{21,7,13,5,11}

以上 11 通りが答え。

第七問

図



$$\int_5^7 (4^x-759)^{\frac{1}{6}}dx+\int_{\sqrt[6]{265}}^{5}\log_4(6^x+759)\,dx$$

2つの被積分関数は逆関数のため、
求める値は図の斜線部の値となる。よって
$7\times5-5\times\sqrt[6]{265}=\underline{35-5\sqrt[6]{265}}$ //

第8問

[考察]

$x^4+(8-2a)x^2+a=0$ を、$t=x^2$ としてtの式として表すと、

$t^2+(8-2a)t+a=0$ とおける。

相異なる4個の実数解をもつため、tの解をα、βとすると、$\alpha>0$、$\beta>0$

よって、$\alpha<\beta$とすると、これらの解を小さい順に並べた時

$-\sqrt{\beta}$、$-\sqrt{\alpha}$、$\sqrt{\alpha}$、$\sqrt{\beta}$ となる数列ができる。

また、$t^2+(8-2a)t+a=0$ から $\{t-(a-4)\}^2-a^2+9a-16=0$

α,βは相異なる2つの正の数だから、

$$\begin{cases} a-4>0 \\ a>0 \\ -a^2+9a-16 \end{cases}$$

これを解いて $a>\frac{9+\sqrt{17}}{2}$ …①

そして解と係数の関係から、$\alpha+\beta=2a-8$ …②、$\alpha\beta=a$ …③

(1) [考察]より、公比をrとおくと、

$-\sqrt{\beta}=r^3\sqrt{\beta}$

よって $r=-1$

したがって $\sqrt{\alpha}=-\sqrt{\beta}$

$\alpha=\beta$

②、③から

$$\begin{cases} 2\alpha=2a-8 \\ \alpha^2=a \end{cases}$$

aを消去すると、$2\alpha^2-2\alpha-8=0$

$\alpha=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$

$\alpha>0$より $\alpha=\frac{1+\sqrt{17}}{2}$

したがって

$a=\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)^2=9+\sqrt{17}$ (これは①を満たす)

(2) [考察]より、公差は $-\sqrt{\alpha}-(-\sqrt{\beta})=\sqrt{\alpha}-(-\sqrt{\alpha})=\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}$

$\therefore \sqrt{\beta}=3\sqrt{\alpha}$ $\therefore \beta=9\alpha$

②、③から
$$\begin{cases} \alpha+9\alpha=-8+2a \\ \alpha\cdot 9\alpha=a \end{cases}$$

aを消去すると $9\alpha^2-5\alpha-4=0$ $\therefore (9\alpha+4)(\alpha-1)=0$

ここで$\alpha>0$より $\alpha=1$

よって $a=9$ (これは①も満たす)

(3) [考察]より $-\sqrt{\beta}$、$-\sqrt{\alpha}$、$\sqrt{\alpha}$、$\sqrt{\beta}$ の階差数列を$\{a_n\}$とすると、

b_n: $-\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$、$2\alpha$、$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ として等差数列ができる。

$\{a_n\}$の公差をdとすると、$-\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+2d=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$

$\therefore d=\sqrt{\alpha}$

よって $-\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha}=2\alpha$ となり、$\beta=4\alpha^2$ となる。

②、③から
$$\begin{cases} \alpha+4\alpha^2=-8+2a \\ \alpha\cdot 4\alpha^2=a \end{cases}$$

aを消して、$8\alpha^3-4\alpha^2-\alpha-8=0$

ここから解の公式を使わないと答えが出せなくなっていました。すみませんでした。

第9問

次の値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\left(20242024^{2^{-n}}-20242023^{2^{-n}}\right)\cdot\prod_{k=0}^{n}\left(20242024^{2^{-k}}+20242023^{2^{-k}}\right)\right\}$$

解答

和と差の因数分解の公式を用いれば、$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$ と因数分解できる。

さらに、$x-y=(x^{\frac{1}{2}})^2-(y^{\frac{1}{2}})^2=(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})$

$x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}=(x^{\frac{1}{4}})^2-(y^{\frac{1}{4}})^2=(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}})(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}})$

と変形でき、この操作を無限に繰り返せば、

$$x^2-y^2=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(x^{2^{-n}}-y^{2^{-n}}\right)\cdot\prod_{k=0}^{n}\left(x^{2^{-k}}+y^{2^{-k}}\right)\right\}$$

が成り立つ。

したがって求めるべき値は、

$$20242024^2-20242023^2$$

である。

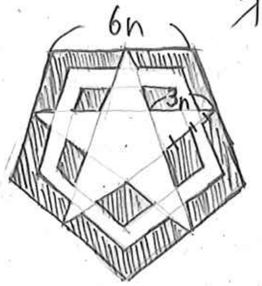
nを自然数とするとき、

$$n^2-(n-1)^2=2n-1$$

より、

$$\begin{aligned}20242024^2-20242023^2&=2\cdot 20242024-1\\&=\underline{40484047}\end{aligned}$$

第10問



方針

大きい正五角形から斜線部の面積を引く。

(白い部分が求める面積)

 この図形はひし形であるので大きい正五角形の一辺の長さは 5n である。nこうの正多角形の面積を求める公式は、

$$S=\frac{na^2}{4\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$ (S:面積, a:一辺の長さ, n:正n角形)

また平行四辺形を二辺と夾角から求める公式は $S=ab\sin\theta$

(S:面積, a, b: θ をはさむ2辺の長さ; θ:夾角)

以上より求める面積 S は、

$$S=\underbrace{\frac{5(6n)^2}{4\tan 108^\circ}}_{\text{正五角形}}+\underbrace{\left(-3n\cdot 3n\cdot\sin 108^\circ+2n\cdot 2n\cdot\sin 108^\circ-n\cdot n\cdot\sin 108^\circ\right)}\times\underbrace{5}_{5つ分}$$

まわりくどいが、3n 3n をひいて 2n 2n を足し n n をひくと n n の面積が求まる。

$$=\frac{45n^2}{\tan 108^\circ}-30n^2\sin 108^\circ$$ ここまででもよいものとする

$$=n^2\left(\frac{45(\sqrt{5}+1)}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}-\frac{30}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)$$

$$=\frac{n^2}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\left\{\frac{45}{\sqrt{5}}(\sqrt{5}+1)-30\right\}$$ $\sqrt{10+2\sqrt{5}}\times\sqrt{5}$

$$=\frac{n^2}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\cdot\sqrt{5}\,(3\sqrt{5}+9)$$ $\sqrt{50+10\sqrt{5}}$

$$=\frac{3}{4}(\sqrt{5}+3)\sqrt{50+10\sqrt{5}}$$ //

第11問

まず、$n=5$ のとき、5は素数なので、$5\to 6$ となる。

6は合成数で $6=2\cdot 3$ なので、$5\to 6\to 5$ となり、5はループする。

n に対して、m回目の操作によって生じた数を $N_m(n)$ とする。

（ただし、$N_m(n)\geq 7$）

(i) $N_m(n)$ が素数ならば、$N_{m+1}(n)=N_m(n)+1$ である。

$N_m(n)$ は奇素数だから、$N_{m+1}(n)$ は偶数であって、

素因数に2を必ずもつ。

$N_{m+1}(n)=2k$（kは自然数）とする。条件から $k>2$

なので、$N_{m+2}(n)=2+k<2k=N_{m+1}(n)$。

また、$N_m(n)\geq 7$ ならば、$6\leq N_{m+2}<N_{m+1}(n)$ である。

(ii) $N_m(n)$ が素数でないとき、すなわち、$N_m(n)$ が、

合成数であるとき、$N_m(n)$ はその素因数 p_i を用いて、

$N_m(n)=\prod_i p_i=p_1\cdot p_2\cdots\cdot p_j$ と表せる。

ここで、素数は2以上だから、

$N_{m+1}(n)=\sum_i p_i=p_1+p_2+\cdots+p_j\leq\dfrac{N_m(n)}{2}<N_m(n)$

また、条件と素数は2以上であることより、$6\leq N_{m+1}(n)$。

(i),(ii)により、少なくとも2回の操作で、$N_m(n)$ は、それよりも

小さい数となる。 ---①

また、いずれの操作後も6以上となる。…②

①より、7より大きい数にはループする数（有限の操作で自己にもどる数）が存在しないことが分かる。 ----③

ここで、有限回の操作で、5にならない数 l が存在すると仮定する。これは、6にならない条件にも等しい。

すると、有限回の操作後に自己にもどるような数 k ($k\geq 7$) が存在するが、③により、否定される。ゆえに、有限回の操作で、5にならない数 l が、存在しない。すなわち、どの数 $n(\geq 5)$ に対しても有限回の操作で、5になる。

第　12　問
解答

美根翔

立方数の和

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^3 &= \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 \\ &= \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 \\ &= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2\end{aligned}$$

下の図には一辺 1 の正方形 1 つ分の面積、一辺 2 の正方形 2 つ分の面積 $(2 \cdot 2 \cdot 2)$、一辺 3 の正方形 3 つ分の面積 $(3 \cdot 3 \cdot 3)$、一辺 4 の正方形 4 つ分の面積 $(4 \cdot 4 \cdot 4)$ が含まれている。よって合計の面積は、連続した立方数の和となる。また、これを一つの正方形とみると、一辺は $(1 + 2 + 3 + 4)$ と連続した数の和になっている。そして正方形の面積は一辺の 2 乗であり、この図は対応する任意の自然数まで拡張できる。よって、上の式となる。