第　1　問

八木 千尋

任意の実数 p, q に対し，それらを引数とする 2 変数関数 f, g を次のように定義する．

$$f(p, q) \coloneqq \frac{(p+q)+|p-q|}{2}$$
$$g(p, q) \coloneqq \frac{(p+q)-|p-q|}{2}$$

次の問いに答えよ．

(1) 次式を満たす，整数の組 (x, y) の個数を求めよ．ただし，a, b を自然数とする．

$$f(x, y) = a$$
$$g(x, y) = b$$

(2) 次式を満たす，点 (x, y) が作る領域の面積を求めよ．ただし，a, b は正数とする．

$$f(|x|, |y|) \leq a$$
$$g(|x|, |y|) \leq b$$

第　2　問

八木 千尋

$2n+1$ 種類の手の出し方でじゃんけん[*1]を行うことを考える．i 番目のじゃんけんの手は i と整数値であらわされる．また，k 人でこのじゃんけんをするとき，人 $P_j(1 \leq j \leq k)$[*2]が出した手を $f(j)$ とする．
このとき，じゃんけんの手 p, q に対して，これらの強弱を返す，二変数関数 $g(p,q)$ を以下のように定義する，

$$g(p,q) = \left\lfloor \frac{p-q \quad (mod \quad 2n+1)}{n} \right\rfloor . \tag{1}$$

また，$g(p,q)$ の入力と出力の関係は，

$$g(p,q) = \begin{cases} 0 & \Longrightarrow \text{手 } p \text{ と手 } q \text{ は同じ強さである．} \\ 1 & \Longrightarrow \text{手 } p \text{ は手 } q \text{ より強い．} \\ 2 & \Longrightarrow \text{手 } p \text{ は手 } q \text{ より弱い．} \end{cases} \tag{2}$$

である．
また，全体の勝敗は次のように決定される，

- 人 P_v と $v \neq u$ を満たす全ての u に対して，$g(f(u), f(g)) \neq 2 \implies$ 人 P_v は勝った．
- 人 P_v と $v \neq u$ を満たす全ての u に対して，$g(f(u), f(g)) \neq 1 \implies$ 人 P_v は負けた．

ただし，次の場合は全体の勝敗を「あいこ」[*3]とする．

- 全ての人が勝ったかつ負けた．
- 全ての人が勝っていないかつ負けていない．

$2n+1$ 種類の手でじゃんけんを k 人で行うっ試行で，全体の勝敗が「あいこ」となるときの確率を $p_{n,k}$ する．

(1) $p_{1,3}$ を求めよ

(2) $p_{1,k}, p_{2,k}$ を求めよ

(3) $p_{k,3}$ を求めよ

[*1] じゃんけんとは，互いの手の出し方による強弱関係により相手を蔑んだり，蔑まれたりする伝統的な殺戮ゲームである．一般に，3 という非常に奇妙な素数種類の手で行われるらしい．
[*2] 人，ホモサピエンスとは，ヒト属で現存する唯一の種である．
[*3] 「あいこ」とは，じゃんけんゲームにおいて，互いに殺戮されなかったことを意味する専門用語・隠語である．

第　3　問
キウイと階段

長谷川 晃一

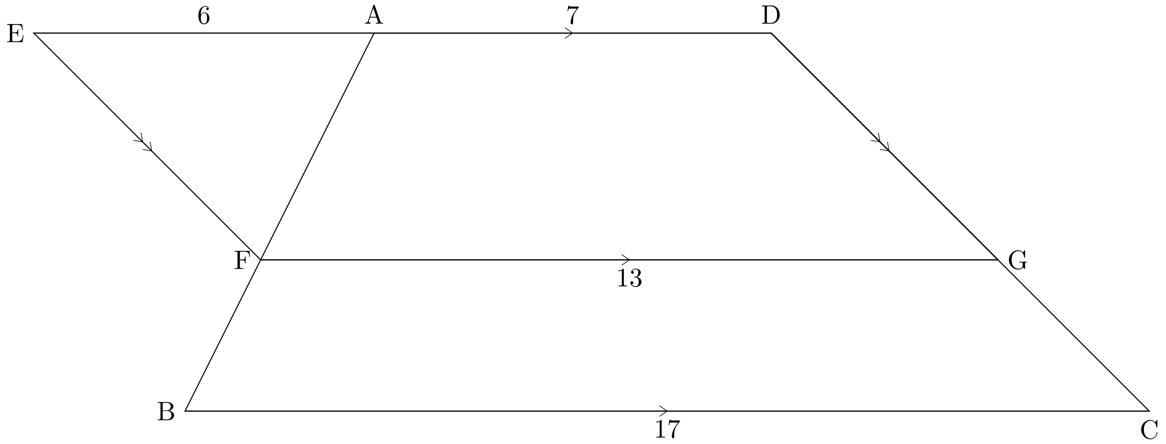
少年キウイくんは，目の前の階段を 7 段上ったのち，降りることにした．
キウイくんは以下の条件に従う．

- 階段を一度に 1 段，もしくは 2 段上ることが出来る．
- 一度に上るのに 1 秒かかる．
- 階段は全部で 10 段である．
- 階段が残り 1 段のときに 2 段降りると折り返す．
  - 自身が 1 段目にいるときに 2 段降りると，次ターンに 1 段目から登り始める．
  - 自身が 9 段目にいるときに 2 段伸びると，次ターンに 9 段目から降り始める．
- 上り始めてから 20 秒後までに降りなければならない．

このときのキウイ君が階段を降りるまでの上り下りの仕方は何通りあるか．

第　4　問

望月 允陽　丸山 大登



△ABC の面積は、四角形 FBCG の面積の何倍か。

第　5　問

森田 悠斗　大場 洸之介　久保 洋翔

4 人で麻雀をする．牌は 34 種類 $\times 4$ 枚の 136 枚あり，そのうち一九字牌は 13 種類 $\times 4$ 枚の 52 枚ある．このとき，4 人全員が配牌ときに国士無双十三面待ちになるようにしたい．

ただし $\log_{10}(136!) \fallingdotseq 232.56$，$\log_{10}(84!) \fallingdotseq 126.52$，$\log_{10}(24) \fallingdotseq 1.38$，$\log_{10}(13!) \fallingdotseq 9.79$ とする．

(1) 4 人全員の配牌ときの手牌が一九字牌のみになる確率を求めよ．(数値で求めなくてよい．)

(2) (1) を踏まえて，4 人全員の配牌ときの手牌が国士無双十三面待ちになる確率を小数展開するとき，初めて 0 以外の数字が表れる桁は小数点以下何桁目か答えよ．

第　6　問

浦 一哲

自然数の組 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$ は，以下の条件を満たす．

- $a > b > c > d > e > 1$
- どの 2 つを選んでも互いに素である．[*1]
- $a + b + c + d + e = 57$

この条件を満たす，自然数の組 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$ はいくつあるか．

[*1] 「整数 $a,\ b$ が互いに素」とは，「$a, |\ b$ の最大公約数が 1 である」ことに等しい．

第　7　問

法月 太志

次の積分を計算せよ.

$$\int_b^a (4^x - 759)^{\frac{1}{6}}\,dx + \int_{\sqrt[6]{265}}^5 (x^6 + 759)dx$$

第　8　問

野田 尚杜

a を実数とする．方程式 $x^4+(8-2a)x^2+a=0$ は相異なる 4 個の実数解をもつ．次の問いに答えよ．

(1) 解を小さい順に並べたとき，等比数列となる a の値を求めよ．

(2) 解を小さい順に並べたとき，等差数列となる a の値を求めよ．

(3) 解を小さい順に並べたとき，階差数列となる a の値を求めよ．

第　9　問

鈴木 玲於

次の極限は収束する (有限確定値をもつ). その値を求めよ. *[1]

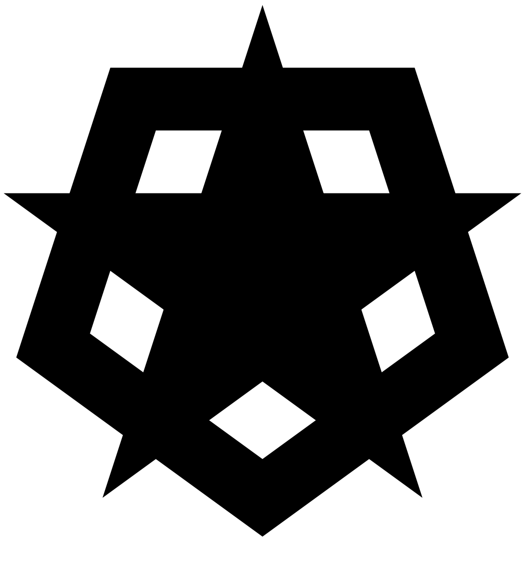
$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(20242024^{2^{-n}}-20242023^{2^{-n}}\right)\prod_{k=0}^{n}\left(20242024^{2^{-k}}+20242023^{2^{-k}}\right)\right)$$

*[1] 20242024^{2^x} は $2024\times 2024^{2^x}$ ではないことに注意せよ. そのほか同様.

第　10　問

原 涼太朗

正五角形 S と，その対角線を考える．
S のある 1 つの頂点を点 A とする．その点から，伸びる対角線の 1 つを l とする．対角線 l について，他の対角線と交わる交点のうち，A とは異なり，A から最も近い点を F とする．AF の長さを $3n$ とする．
図のように，1 辺の長さが異なる 2 つの正五角形を配置する．このとき，AF とこの 2 つの正五角形との交点は，AF を 3 等分する．他の頂点と対角線の組についても同様とする．
このとき，図の黒色の部分の面積を求めよ．



第　11　問

鶴 智之

自然数 $n(n \geq 5)$ について以下の操作を有限回繰り返すことで 5 となることを示せ。

n が素数なら、n を n に 1 足したものにする。
n が合成数なら、n を n の素因数全てを足したものにする。(例 : $12 \to 2+2+3=7$)

第　12　問

美根　翔

立方数の和

任意の自然数 n において $\sum_{k=1}^{n} k^3$ をより簡単な形で表しなさい。
そして、なぜそのような形になるのか図を使って説明しなさい。